Résolution d'équations différentielles d'ordre 2

I Capacité numérique

- Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2
  - Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1
  - Utiliser la fonction odeint de la bibliothèque scipy.integrate (sa spécification étant fournie).

II Modules

Conformément au programme, on utilise la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` (documentation) pour réaliser l'intégration **numérique** d'une équation différentielle d'ordre 2.

Notons qu'on pourra lui préférer la fonction `solve_ivp` du même module offrant davantage de possibilités (documentation), en particulier celle de déterminer les instants où certains évènements sont réalisés.

```
%matplotlib inline
```

La ligne précédente ne doit apparaître que dans les notebooks `Jupyter`, pas dans un fichier python.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.ma as ma
```

III Équation différentielle d'ordre 2

III.1 Système d'équations différentielles d'ordre 1

La dynamique du point matériel amène à considérer des équations différentielles d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = f\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, t\right).$$

Les systèmes de résolution numérique sont conçus pour résoudre (voir par exemple la méthode d'Euler) des équations différentielles d'ordre 1. On transforme donc

- **une** équation différentielle d'ordre **2** dont l'inconnue est x
- en un système de **2** équations différentielles d'ordre **1**, dont les inconnues sont x et x',

en écrivant :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'$$
$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = f(x, x', t)$$

Il ne reste alors plus qu'à intégrer numériquement ces deux équations différentielles simultanément en utilisant, par exemple la méthode d'Euler, ou un autre algorithme.

III.2 Adimensionnement du système différentiel

Prenons l'exemple de l'oscillation d'un pendule simple de longueur ℓ, pour des amplitudes d'oscillation quelconques, en l'absence de frottement. L'équation différentielle vérifiée par l'angle θ est :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0,$$

avec $\omega_0^2 = g/\ell$. En introduisant la période des oscillations de faible amplitude $T_0 = 2\pi/\omega_0$, on définit la variable sans dimension $\tau = t/T_0$ pour réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + (2\pi)^2 * \sin(\theta) = 0,$$

On utilisera alors $\theta' = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$ comme « vitesse adimensionnée ».

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'adimensionner l'angle θ puisqu'il est déjà sans dimension.

III.3 Utilisation d'`odeint`

On cherche à intégrer numériquement le système différentiel :

- entre les instants t_{min} et t_{max}
- vérifiant les conditions initiales

$$\theta(t_{\text{min}}) = \theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t_{\text{min}}) = v_0//\ell$$

On doit pour cela définir le système différentiel, comme une fonction calculant les taux de variation de θ et θ' connaissant leurs valeurs à τ ainsi que l'instant τ. On peut définir la liste u contenant θ et θ'.

```
def systdiff(u,tau):
    theta,thetaprime = u
    # d theta/d t = thetaprime
    # d thetaprime / dt = - sin(theta)
    return [thetaprime, - (2*np.pi)**2*np.sin(theta)]
```

Ici, le système différentiel ne dépend :

- pas de la vitesse car on a négligé tout frottement,
- pas explicitement du temps car il n'y a pas de forçage.

On définit ensuite les instants auxquels seront calculés θ et θ', en unité de T_0.

```
longueur = .4 #m
g0 = 9.8 #m/s^2
omega0 = np.sqrt(g0/longueur) #rad/s
T0 = 2*np.pi/omega0

tau_min = 0
tau_max = 5 #périodes T0
NombrePoints = 2000
tau = np.linspace(tau_min,tau_max,NombrePoints)
mask=ma.masked_greater(tau,1).mask #pour ne conserver que l'intervalle tau = 0:1,
    soit t = 0:T0
instants = tau*T0
instantsMasked = instants[~mask]
```

On définit ensuite les conditions initiales :

```
theta0 = np.pi/2 #angle initial (rad)
v0 =  2 #vitesse (m/s)
thetaprime0 = v0/(longueur*T0) # (rad)
CI = [theta0,thetaprime0]
```

On appelle enfin la fonction `odeint` qui prend pour arguments la fonction `systdiff`, les conditions initiales et les instants précédemment définis.

```
sol = odeint(systdiff,CI,tau)
angles = sol[:,0]
vitessesAngAdim = sol[:,1] #en unités de 1/T_0
vitessesAng = vitessesAngAdim/T0 #en unités de 1/T_0
vitesses = 100*vitessesAngAdim*longueur/T0 # en cm/s
anglesMasked = angles[~mask]
vitessesAngMasked = vitessesAng[~mask]
vitessesMasked = vitesses[~mask]
```

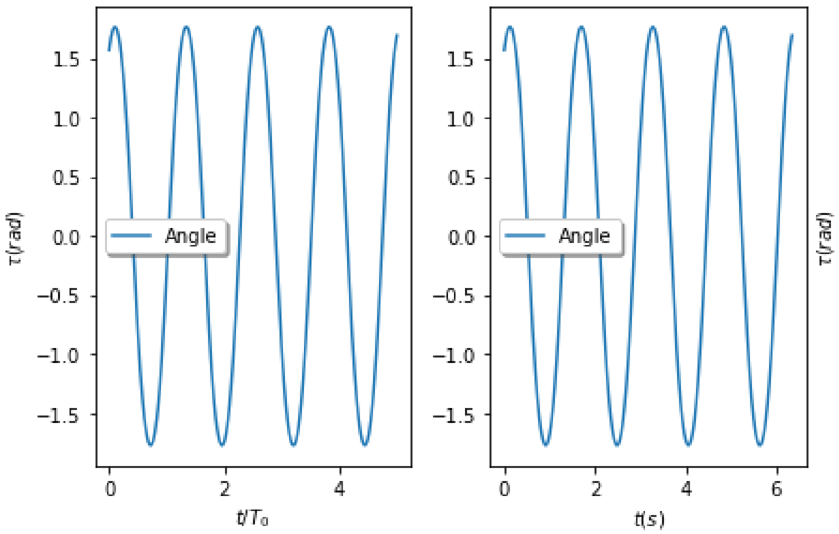
III.4 Affichage des résultats

On peut tracer θ en fonction de τ ou «redimensionner» pour le tracer en fonction de t.

```
figtemporel,(axtempAdim,axtempDim) = plt.subplots(1,2) #pour avoir deux figures côte à
    côte
figtemporel.tight_layout()
axtempAdim.plot(tau,angles,label='Angle')
axtempAdim.set_xlabel(r"$t/T_0$")
axtempAdim.set_ylabel(r"$\tau(rad)$" )
axtempAdim.legend(loc='best',shadow=True)

axtempDim.plot(instants,angles,label='Angle')
axtempDim.set_xlabel(r"$t(s)$")
axtempDim.set_ylabel(r"$\tau(rad)$" )
axtempDim.yaxis.set_label_position("right")
axtempDim.legend(loc='best',shadow=True)

figtemporel.show()
```

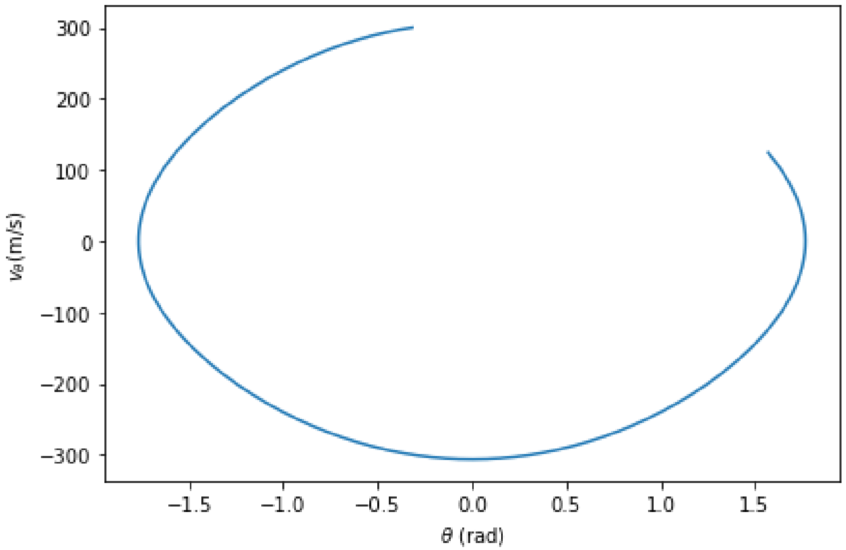


Remarquons qu'ici la période n'est pas égale à T_0 puisque l'approximation des oscillations de faible amplitude n'est pas légitime.

On peut également tracer la trajectoire dans l'espace des phases en traçant $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de θ. On ne la trace que sur une durée T_0 : on observe ainsi que la période est supérieure, pour cette amplitude, à T_0 puisqu'on n'effectue pas une oscillation complète en T_0.

```
figphase,axphase = plt.subplots()
figphase.tight_layout()
axphase.plot(anglesMasked,vitessesMasked)
axphase.set_xlabel(r"$\theta$ (rad)")
axphase.set_ylabel(r"$v_\theta$(m/s)" )

figphase.show()
```



Remarquons que l'utilisation de la fonction `solve_ivp` permettrait de déterminer directement la période puisque son argument `events` permettrait de renvoyer la valeur de l'instant où $\dot{\theta} = 0$ s'annule, soit, si l'objet a été lâché sans vitesse initiale, la durée d'une demi-période.

Enfin, dans le cas d'un mouvement à N degrés de libertés, on utilisera un système de $2N$ équations différentielles de degré 1. Pour un mouvement dans le plan x, z, on utilisera par exemple les grandeurs x, z, x', z'.

IV Questions du DM06

IV.1 II.3.b

IV.2 II.3.c